# Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Leçons : 221

Réf. : ×

**Théorème :**

On considère l'équation différentielle $(E) : Y'(t) = A(t)\,Y(t) + B(t)$

où $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sont continues,

et $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.

Alors, pour tout $(t_0, Y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution $Y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ de $(E)$ telle que $Y(t_0) = Y_0$.

globale

## Cas $I = [a, b]$, $a < b$

### 1) Introduction de F

Soit
$$F : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(t, Y) \longmapsto A(t)\,Y + B(t)$$

F est alors continue sur $I \times \mathbb{R}^n$, et lipschitzienne par rapport à la seconde variable.

En effet, soit $k = \sup_{t \in I} \|A(t)\|$ où $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni d'une norme d'algèbre.

$$\forall t \in I, \forall (Y_1, Y_2) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad \|F(t, Y_1) - F(t, Y_2)\| = \|A(t)(Y_1 - Y_2)\|$$
$$\leq \|A(t)\|\,\|Y_1 - Y_2\|$$

$$\boxed{\|F(t, Y_1) - F(t, Y_2)\| \leq k\,\|Y_1 - Y_2\|}$$

On considère $(t_0, Y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$

## 2) Reformulation du problème

Soit $Y \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$. Alors

$$\begin{cases} Y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n) \\ Y \text{ est solution de } (E) \text{ de conditions initiales } (t_0, Y_0) \end{cases} \iff \forall t \in I,\ Y(t) = Y_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, Y(s))\, ds$$

Soit $E = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$

et $\Phi : E \to E$

$$Y \mapsto \Phi(Y) : t \in I \mapsto Y_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, Y(s))\, ds$$

Alors :

- $E = \mathcal{C}_b(I, \mathbb{R}^n)$ car $I$ est compact, et $\mathbb{R}^n$ est complet donc $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est complet
- $F$ est continue donc : $\forall Y \in E$, $\Phi(Y) \in E$ et $\Phi$ est bien définie
- $\boxed{Y \text{ est solution de } (E) \text{ de c.i. } (t_0, Y_0) \iff \Phi(Y) = Y.}$

## 3)

**Lemme** : Soit $(E, d)$ un espace métrique complet et $\Phi : E \to E$.
Alors : $\Phi$ admet une itérée strictement contractante $\Rightarrow$ $\Phi$ admet un unique point fixe.

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $\Phi^d$ soit strictement contractante.
Alors, par le théorème du point fixe de Picard :

$$\exists!\ x \in E \ / \ \Phi^d(x) = x.$$

Donc $\Phi(\Phi^d(x)) = \Phi^d(\Phi(x)) = \Phi(x)$ donc $\Phi(x)$ est un point fixe de $\Phi^d$.

et par unicité de $x$, $\boxed{\Phi(x) = x.}$

Enfin si $\Phi(x') = x'$, alors $\Phi^d(x') = x'$ donc $\boxed{x' = x}$

donc $\boxed{\Phi \text{ admet un unique point fixe.}}$

A

CLE.

2

4) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$(H_n)$ : $\forall Y, Z \in E, \forall t \in I, \|\Phi^n(Y)(t) - \Phi^n(Z)(t)\| \leq \frac{k^n |t - t_0|^n}{n!} \|Y - Z\|_\infty$

- $n = 0$ : $\Phi^0 = id_E$ donc $(H_0)$ est vérifiée ($\|Y(t) - Z(t)\| \leq \|Y - Z\|_\infty$)
- soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $(H_n)$ vérifiée. M.q. $(H_{n+1})$ l'est alors également

$Y, Z \in E$, $t \in I$. On suppose $t \geq t_0$

$$\|\Phi^{n+1}(Y)(t) - \Phi^{n+1}(Z)(t)\| = \left\|\int_{t_0}^{t} F(s, \Phi^n(Y)(s))\,ds - \int_{t_0}^{t} F(s, \Phi^n(Z)(s))\,ds\right\|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \|F(s, \Phi^n(Y)(s)) - F(s, \Phi^n(Z)(s))\|\,ds$$

$F$ $k$-lip.

$$\leq \int_{t_0}^{t} k \cdot \|\Phi^n(Y)(s) - \Phi^n(Z)(s)\|\,ds$$

$(H_n)$

$$\leq \int_{t_0}^{t} k \frac{(s - t_0)^n}{n!} \cdot k^n \|Y - Z\|_\infty\,ds$$

$$\|\Phi^{n+1}(Y)(s) - \Phi^{n+1}(Z)(s)\| \leq \frac{k^{n+1}(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!} \|Y - Z\|_\infty$$

donc $(H_{n+1})$ est vérifiée, ce qui termine le raisonnement par récurrence.

5) Conclusion pour le cas $I$ compact

On a donc : $\forall Y, Z \in E, \forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\|\Phi^n(Y)(t) - \Phi^n(Z)(t)\| \leq \frac{k^n}{n!}(b - a)^n \|Y - Z\|_\infty$$

indépendant de $t$

donc $\|\Phi^n(Y) - \Phi^n(Z)\|_\infty \leq \frac{k^n}{n!}(b - a)^n \|Y - Z\|_\infty$

Or, $\frac{k^n}{n!}(b - a)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc : $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \frac{k^{n_0}}{n_0!}(b - a)^{n_0} < 1$

soit $\Phi$ admet une itérée strictement contractante.

ce qui termine la démonstration dans le cas $I$ compact.

Cas $I$ quelconque : $(t_0, Y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$

Il existe une suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de segments compacts telle que

- $\forall n \in \mathbb{N}, \ I_n \subset I$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \ t_0 \in I_n$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \ I_n \subset I_{n+1}$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = I$

On note $Y_n$ l'unique solution de $(E)$ restreinte à $I_n$ ($A_{/I_n}$ et $B_{/I_n}$).

On pose alors : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ Y_{/I_n} = Y_n}$ (si $n < p$, $Y_{p/I_n} = Y_n$)

Alors :
- $Y : I \to \mathbb{R}^n$ et $Y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$
- $Y$ vérifie $(E)$ et $Y(t_0) = Y_0$
- $Y$ est unique par construction

ce qui termine la démonstration.